Об одной задаче изгиба пластинки в случае прямоугольника, ослабленного отверстием и вырезками в вершинах

Г. А. Капанадзе & Л. А. Гоголаури

ABSTRACT

Рассматривается задача отыскания равнопрочного контура теории изгиба пластинки для прямоугольника, ослабленного отверстием и вырезками в вершинах (неизвестная часть границы) при условии, что на каждом линейном отрезке границы прикреплена жесткая планка и пластинка изгибается нормальными моментами, приложенными к планкам таким образом, что углы поворота средней поверхности пластинки принимают кусочно-постоянные значения, а неизвестная часть границы свободна от внешних усилий. Условие равнопрочности искомого контура (совокупность границ отверстий и вырезок) заключается в том, что действующий на него тангенциальный нормальный момент принимает постоянное значение.

Ключевые слова: Задача изгиба пластинки; Конформное отображение; Задачи Римана - Гильберта и Келдыша Седова; Эллиптические интегралы.

Classification: FOR code: 020299

Language: English

London Journals Press

LJP Copyright ID: 925672
Print ISSN: 2631-8490
Online ISSN: 2631-8504

London Journal of Research in Science: Natural and Formal

Volume 19 | Issue 3 | Compilation 1.0

Об одной задаче изгиба пластинки в случае прямоугольника, ослабленного отверстием и вырезками в вершинах

Г. А. Капанадзе [α] & Л. А. Гоголаури [σ]

ABSTRACT

Рассматривается задача отыскания равнопрочного контура теории изгиба пластинки для прямоугольника, ослабленного отверстием и вырезками в вершинах (неизвестная часть границы) при условии, что на каждом линейном отрезке границы прикреплена жесткая планка и пластинка изгибается нормальными моментами, приложенными к планкам таким образом, что углы поворота средней поверхности пластинки принимают кусочно-постоянные значения, а неизвестная часть границы свободна от внешних усилий. Условие равнопрочности искомого контура (совокупность границ отверстий и вырезок) заключается в том, что действующий на него тангенциальный нормальный момент принимает постоянное значение.

Методами комплексного анализа, комплексные потенциалы выражающие прогиб средней поверхности пластинки и уравнение искомого равнопрочного контура построены эффективно (в аналитическом виде). Приведен анализ упомянутых результатов в случае квадрата.

2010 Mathematics Subject Classification 74B05.

Ключевые слова: Задача изгиба пластинки; Конформное отображение; Задачи Римана-Гильберта и Келдыша-Седова; Эллиптические интегралы.

Author α: A. Razmadze Mathematical Institute of Iv. Javakhishvili, Tbilisi State University 6, Tamarashvili Str. Tbilisi 0186 Georgia I.Vekua Institute of Applied Mathematics of Iv. Javakhisvili Tbilisi State University, 2, University str. Tbilisi 0186, Georgia.

σ: A. Razmadze Mathematical Institute of Iv. Javakhishvili, Tbilisi State University 6, Tamarashvili Str. Tbilisi 0186 Georgia.

Введение. Задачи отыскания равнопрочного контура плоской теории упругости и изгиба пластинки можно отнести к обширному классу задач оптимизации форм упругих тел (см. [1])и они всегда были в центре внимания многих ученых. Среди методов, разработанных для изучения этих задач одно из важных мест занимают методы комплексного анализа (методы теории граничных задач аналитических функций и конформного отображения). Этим подходом упомянутые задачи рассмотрены в работах [2-10].

Постановка задачи. Пусть серединная поверхность упругой изотропной пластинки на плоскости z комплексной переменной занимает двухсвязную область S_0, внешняя граница которой представляет прямоугольник с вырезками в вершинах, а внутренняя граница – гладкий замкнутый контур (фиг. 1). Предположим, что на каждом линейном участке внешней границы прикреплена жесткая планка и пластинка изгибается нормальными моментами приложенными к планкам таким образом, что углы поворота средней поверхности пластинки принимают кусочно постоянные значения, перерезывющая сила равна нулю, а неизвестная часть границы (искомый равнопрочный контур) свободна от внешних усилий. Рассмотрим симметричный случай и будем считать, что на каждом отрезке внешней границы заданы значения главного нормального изгибающего момента.

London Journal of Research in Science: Natural and Formal

Рассмотрим задачу: найти прогиб $w(x,y)$ средней поверхности пластинки и аналитическую форму неизвестной части границы при условии, что действующий на неё тангенциальный нормальный момент принимает постоянное значение $M_s(t) = K_0 = const$.

Решение задачи. В силу симметрии, мы можем рассмотреть упругое равновесие заштрихованной части S области S_0 (фиг. 1), граница которой состоит из прямолинейных отрезков $L_1 = \cup L_1^{(j)}\ (L_1^{(j)} = A_j A_{j+1},\ j = 1,2,4,5)$ и из дуги $L_0 = L_0^{(1)} \cup L_0^{(2)}\ \ (L_0^{(1)} = \overset{\smile}{A_3 A_4};\ L_0^{(2)} = \overset{\smile}{A_6 A_1})$.

Согласно приближенной теории изгиба пластинки прогиб $w(x,y)$ средней поверхности в рассатриваемом случае удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 w(x;y) = 0,\ \ z = x + iy \in S \tag{1}$$

и граничным условиям

$$M_n(t) = f(t), \quad \left(N\ t \frac{\partial w}{\partial n} = t(\ ) L \right), \quad (\ ) = 0, \quad \in\ _1,$$
$$M_n(t) = 0;\ \ M_{ns}(t) = 0, M_s(t) = K_0, N(t) = 0, t \in L_0, \tag{2}$$

где $f(t) = f_k = const\ \ (k = 1,2,4,5)$ - главные нормально изгибающие моменты; $d(t) = d_k = tg\,\gamma_k$ (γ_k - углы поворота), $t \in L_1;\ N(t)$ - перерезывющая сила; $M_{ns}(t)$ - крутящий момент; $M_s(t)$ - тангенциальный нормальный момент.

Отметим, что в классических постановках задач изгиба пластинки, на свободной части границы обычно имеем два условия: $M_n(t) = 0;\ N(t) + \dfrac{\partial H_{ns}(t)}{\partial s} = 0$, но в случае равнопрочного контура, который характеризуется условием $M_s(t) = K_0 = const$, как это увидим ниже, условие $N(t) = 0$ выполняется автоматически, и таким образом, на L_0 остаются два условия $M_n(t) = H_{ns}(t) = 0,$ а $M_s(t)$ - принадлежит к внутренним силовым факторам.

На основании известных формул (см. [12]-[14]) имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial n} + i\frac{\partial w}{\partial s} = e^{-i\alpha(t)}\left[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}\right],\\
&(\sigma - 1)\, d[\chi\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}] = \left[M_n(t) + i\int_0^s N(t)ds\right]dt,\\
&M_n + M_s = -8D_0(1+\sigma)\operatorname{Re}\left[\varphi'(t)\right],
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\alpha(t)$ - угол между осью ox и внешней нормалью границы в точке $t \in L_1$. D_0 - цилиндрическая жесткость пластинки $(D_0 = Eh^3[12(1-\sigma^2)]^{-1})$, σ - коэффициент Пуассона, $\chi = (\sigma + 3)(1 - \sigma)^{-1}$.

На основании (2) и (3), относительно искомых функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ получим граничные условия

M $$\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha(t)}(\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)})\right] = d(t),\ \ t \in L_1; \tag{4}$$

N $$\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha(t)}(\chi\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)})\right] = c(t),\ \ t \in L_1; \tag{5}$$

$$\chi\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}=0,\quad t\in L_0; \tag{6}$$

$$\mathrm{Re}\left[\varphi'(t)\right]=\frac{K}{4},\quad t\in L_0, \tag{7}$$

где

$$c(t)=c_k=\sum_{j=1}^{k}M_j\sin(\alpha_k-\alpha_j), t\in L_1^{(k)},\quad M_j=\left[2D_0(\sigma-1)\right]^{-1}\int_{L_1^{(j)}}M_n(t)ds,$$

$$K=-K_0\left[8D_0(1+\sigma)\right]^{-1},\ (k,j=1,2,4,5).$$

В дальнейшем от искомых функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ потребуем, чтобы $\varphi(z)$ была непрерывна в замкнутой области $S+L$, а $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ были непрерывно продолжимы на границе области S всюду, за исключением быть может вершин A_3 и A_4, в окрестности которых выполняется условие

$$|\varphi'(z)|,|\psi(z)|<N|z-A_k|^{-\delta_k},\ N=const,\ 0\le\delta_k\le\frac{1}{2},\ k=3,4. \tag{8}$$

Сложением равенств (4) и (5) и затем дифференцированием по дуговой абсциссе s, учитывая, что функции $d(t)$ и $c(t)$ кусочно постоянные, получим

$$\mathrm{Im}\varphi'(t)=0,\quad t\in L_1. \tag{9}$$

Отображением области S на единичный круг $|\eta|<1$ и введением функции $\Phi_0(\eta)=\varphi'[\omega_0(\eta)]-\dfrac{K}{4}$ $(z_0=\omega_0(\eta)$ - конформно-отображающая функция), граничные условия (7) и (9) запишутся в виде однородной задачи Римана-Гильберта (см. [12], [15]).

$$\mathrm{Re}\left[\Phi_0(\sigma)\right]=0,\ \sigma\in l_0^{(0)};\quad \mathrm{Im}\left[\Phi_0(\sigma)\right]=0,\ \sigma\in l_0^{(1)}, \tag{10}$$

где $l_0^{(0)}$ и $l_0^{(1)}$ - части окружности $l_0=\{|\eta|=1\}$ соответствующие контурам L_0 и L_1 соответственно. Задача (10) при условии (8) имеет только тривиальное решение, и, таким образом, имеем

$$\varphi(z)=\frac{K}{4}z. \tag{11}$$

Отметим, что линейность комплексного потенциала $\varphi(z)$ является необходимым условием существования равнопрочного контура. Кроме того, в силу линейности функции $\varphi(z)$, заключаем, что перерезывающая сила $N(z)=0$ во всей области, и, таким образом, условие $N(t)=0,\ t\in L_0$ выполняется автоматически (см. сказанное выше).

Пусть функция $z=\omega(\zeta)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $(\mathrm{Im}\zeta>0)$ на область S. Обозначим через a_k прообразы точек $A_k\ (k=\overline{1,6})$ и будем считать, что $a_1=1;\ a_6=-1;\ \zeta_0=\infty$ ($A_0=\omega(\zeta_0)$ - серединная точка дуги $\overset{\cup}{A_3A_4}$ (см. фиг. 1)).

Введением функций

$$\Phi_1(\zeta)=p\omega(\zeta)+\psi(\zeta)-iM_1;\ \Phi_2(\zeta)=i\left[p\omega(\zeta)-\psi(\zeta)-M_2\right],\ \left(p=\frac{K}{4}(\chi-1)\right), \tag{12}$$

граничные условия (5) и (6) с учетом (11) приводятся к граничным задачам Келдыша-Седова для полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ (см. [12], [15])

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\Phi_1(t)=0,\ \ t\in(-\infty;a_5]\cup[a_3;\infty);\\
&\operatorname{Re}\Phi_1(t)=0,\ \ t\in[a_5;-1];\\
&\operatorname{Im}\Phi_1(t)=-M_1,\ \ t\in[-1;a_2];\\
&\operatorname{Re}\Phi_1(t)=-M_2+2pa,\ \ t\in[a_2;a_3].
\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\Phi_2(t)=0,\ \ t\in(-\infty;a_4]\cup[a_2;\infty);\\
&\operatorname{Re}\Phi_2(t)=M_1-2pb,\ \ t\in[a_4;a_5];\\
&\operatorname{Im}\Phi_2(t)=-M_2,\ \ t\in[a_5;1];\\
&\operatorname{Re}\Phi_2(t)=0,\ \ t\in[1;a_2],
\end{aligned}\tag{14}$$

n

где $2a$ и $2b$ - длины сторон прямоугольника (см. фиг. 1).

Будем искать ограниченные на бесконечности решения задачи (13) и (14) класса $h(a_4;a_5;-1;1;a_2;a_3)$ (об этом классе см. [12]) удовлетворяющие условию

$$\Phi_j(\zeta)=\overline{\Phi_j(\overline{\zeta})},\ \ (j=1,2).\tag{15}$$

Индексы упомянутых задач данного класса равны (-2).

Необходимые и достаточные условия существования ограниченных на бесконечности решений задачи (13) и (14) упомянутого класса имеют соответственно вид (см. [11], [12])

$$-iM_1\int_{-1}^{a_2}\frac{d\tau}{\chi_1(\tau)}+\left(-M_2+2pa\right)\int_{a_2}^{a_3}\frac{d\tau}{\chi_1(\tau)}=0,\tag{16}$$

$$(M_1-2pb)\int_{a_4}^{a_5}\frac{d\tau}{\chi_2(\tau)}-iM_2\int_{a_5}^{1}\frac{d\tau}{\chi_2(\tau)}=0,\tag{17}$$

а само решение дается формулами

$$\Phi_1(\zeta)=\frac{\chi_1(\zeta)}{\pi i}\left[-iM_1\int_{-1}^{a_2}\frac{d\tau}{\chi_1(\tau)(\tau-\zeta)}+\left(-M_2+2pa\right)\int_{a_2}^{a_3}\frac{d\tau}{\chi_1(\tau)(\tau-\zeta)}\right],\tag{18}$$

$$\Phi_2(\zeta)=\frac{\chi_2(\zeta)}{\pi i}\left[(M_1-2pb)\int_{a_4}^{a_5}\frac{d\tau}{\chi_2(\tau)(\tau-\zeta)}-iM_2\int_{a5}^{1}\frac{d\tau}{\chi_2(\tau)(\tau-\zeta)}\right],\tag{19}$$

где

$$\chi_1(\zeta)=\sqrt{(\zeta-a_5)(\zeta+1)(\zeta-a_2)(\zeta-a_3)};\ \ \chi_2(\zeta)=\sqrt{(\zeta-a_4)(\zeta-a_5)(\zeta-1)(\zeta-a_2)}.\tag{20}$$

(под радикалами подразумевается ветвь, разложение которой в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид $\zeta^2+\delta_1\zeta+\delta_0+\cdots$).

Легко показать, что функции $\Phi_j(\zeta)\ \ (j=1,2)$ удовлетворяют условию (15).

После нахождения функции $\Phi_j(\zeta)\ \ (j=1,2)$, на основании (12), для функций $\omega(\zeta)$ и $\psi(\zeta)=\psi\left[\omega(\zeta)\right]$ получаем формулы

$$\omega(\zeta)=\frac{1}{2p}\left[\Phi_1(\zeta)-i\Phi_2(\zeta)+M_2+iM_1\right], \tag{21}$$

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2}\left[\Phi_1(\zeta)+i\Phi_2(\zeta)-M_2+iM_1\right]. \tag{22}$$

Для определения аналитической формы искомого равнопрочного контура, воспользуемся формулами (18), (19), (21). Очевидно, что уравнения для частей (дуг) $\overset{\smile}{A_3A_4}$ и $\overset{\smile}{A_6A_1}$ упомянутого контура получаются из образа функции $\omega(\zeta)$, при $\zeta=\xi\in(-\infty;a_4]\cup[a_3;\infty)$. и $\zeta=\xi\in[-1;1]$ соответственно.

Если в формуле (21) перейдем к пределу при $\zeta\to\xi\in[-1;1]$, на основании формулы Сохоцкого-Племеля, получим

$$\omega(\xi)=\frac{1}{2p}\left[\Phi_1(\xi)-i\Phi_2(\xi)\right],\ \xi\in[-1;1], \tag{23}$$

причем интегралы, входящие в этой формуле понимаются в смысле главного значения по Коши. Аналогично, для контура $\overset{\smile}{A_3A_4}$ (дуги) имеем при $\zeta\to\xi\in(-\infty;a_4]\cup[a_3;\infty)$

$$\omega(\xi)=\frac{1}{2p}\left[\Phi_1(\xi)-i\Phi_2(\xi)+M_2+iM_1\right]. \tag{24}$$

Вернемся теперь к формулам (16)-(19) и (23), (24). Интегралы, участвующие в этих формулах выражаются через эллиптические интегралы первого и третьего рода. А именно (см. [16])

$$\begin{gathered}
\int_{-1}^{a_2}\frac{d\tau}{\chi_1(\tau)}=-\frac{2}{\Delta_1}F\left[\frac{\pi}{2};k_1^{(1)}\right];\ \int_{a_2}^{a_3}\frac{d\tau}{\chi_1(\tau)}=-\frac{2i}{\Delta_1}F\left[\frac{\pi}{2};k_1^{(2)}\right];\\
\int_{a_4}^{a_5}\frac{d\tau}{\chi_2(\tau)}=\frac{2i}{\Delta_2}F\left[\frac{\pi}{2};k_2^{(1)}\right];\ \int_{a_5}^{1}\frac{d\tau}{\chi_2(\tau)}=-\frac{2}{\Delta_2}F\left[\frac{\pi}{2};k_2^{(2)}\right];
\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}
\int_{-1}^{a_2}\frac{d\tau}{\chi_1(\tau)(\tau-\zeta)}=\frac{2}{(\zeta-a_3)(\zeta-a_2)\Delta_1}\left\{(a_2-a_3)\prod\left(\frac{\pi}{2};n_1^{(1)};k_1^{(1)}\right)+(\zeta-a_2)F\left[\frac{\pi}{2};k_1^{(1)}\right]\right\};\\
\int_{a_2}^{a_3}\frac{d\tau}{\chi_1(\tau)(\tau-\zeta)}=-\frac{2i}{(a_2-\zeta)(\zeta+1)\Delta_1}\left\{(a_2+1)\prod\left(\frac{\pi}{2};n_1^{(2)};k_1^{(2)}\right)+(\zeta-a_2)F\left[\frac{\pi}{2};k_1^{(2)}\right]\right\};\\
\int_{4}^{a_5}\frac{d\tau}{\chi_2(\tau)(\tau-\zeta)}=-\frac{2i}{(\zeta-1)(\zeta-a_5)\Delta_2}\left\{(a_5-1)\prod\left(\frac{\pi}{2};n_2^{(1)};k_2^{(1)}\right)+(\zeta-a_5)F\left[\frac{\pi}{2};k_2^{(1)}\right]\right\};\\
\int_{a_5}^{1}\frac{d\tau}{\chi_2(\tau)(\tau-\zeta)}=\frac{2}{(\zeta-a_5)(\zeta-a_4)\Delta_2}\left\{(a_5-a_4)\prod\left(\frac{\pi}{2};n_2^{(2)};k_2^{(2)}\right)+(\zeta-a_5)F\left[\frac{\pi}{2};k_2^{(2)}\right]\right\},
\end{gathered} \tag{26}$$

где

$$\Delta_1=\sqrt{(a_3+1)(a_2-a_5)};\ k_1^{(1)}=\frac{1}{\Delta_1}\sqrt{(a_2+1)(a_3-a_5)};\ k_1^{(2)}=\frac{1}{\Delta_1}\sqrt{(a_3-a_2)(-1-a_5)};$$
$$\Delta_2=\sqrt{(1-a_4)(a_2-a_5)};\ k_2^{(1)}=\frac{1}{\Delta_2}\sqrt{(a_2-1)(a_5-a_4)};\ k_2^{(2)}=\frac{1}{\Delta_2}\sqrt{(1-a_5)(a_2-a_4)};$$
$$n_1^{(1)}=\frac{(a_2+1)(\zeta-a_3)}{(a_3+1)(\zeta-a_2)};\quad n_1^{(2)}=\frac{(a_3-a_2)(\zeta+1)}{(a_3+1)(\zeta-a_2)};$$
$$n_2^{(1)}=\frac{(a_5-a_4)(\zeta-1)}{(1-a_4)(\zeta-a_5)};\quad n_2^{(2)}=\frac{(1-a_5)(\zeta-a_4)}{(1-a_4)(\zeta-a_5)};\tag{27}$$

$F\left[\frac{\pi}{2};k\right]=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi}}$ - полный эллиптический интеграл первого рода;

$\prod\left[\frac{\pi}{2};n;k\right]=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{(1-n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ - полный эллиптический интеграл третьего рода.

Если удовлетворимся приближениями

$$F\left[\frac{\pi}{2};k\right]\approx\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{k^2}{4}\right);\ \prod\left[\frac{\pi}{2};n;k\right]\approx\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{k^2}{4}+\frac{n}{2}\right),$$

условия (16) и (17) запишутся в виде

$$M_1\left(1+\frac{k_1^{2\,(1)}}{4}\right)+(M_2-2pa)\left(1+\frac{k_1^{2\,(2)}}{4}\right)=0,\tag{28}$$

$$(M_1-2pb)\left(1+\frac{k_2^{2\,(1)}}{4}\right)+M_2\left(1+\frac{k_2^{2\,(2)}}{4}\right)=0,\tag{29}$$

а для функций $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\xi)$ на основании (18)), (19), (26)-(29) получаем формулы

$$\Phi_1(\xi)=\frac{\chi_1(\xi)}{2\Delta_1}\cdot\frac{(a_3-a_2)(a_2+1)}{(a_3+1)(\xi-a_2)^2}\left(2pa+M_1-M_2\right);$$
$$\Phi_2(\xi)=\frac{\chi_2(\xi)}{2\Delta_2}\cdot\frac{(a_5-a_4)(1-a_5)}{(1-a_4)(\xi-a_5)^2}\left(-2pb+M_1-M_2\right),\tag{30}$$

Причем $\xi\in[-1;1]\cup(-\infty;a_4]\cup[a_3;\infty)$.

Таким образом для определения параметров p,a_2,a_3,a_4,a_5 имеем два условия (28) и (29). Рассмотрим случай циклической симметрии, т. е. примем, что $a=b;\ M_1=M_2=M;\ a_2=\delta;a_5=-\delta;a_3=\gamma;a_4=-\gamma$.

Как легко заметить, в этом случае

$$k_1^{(1)}=k_2^{(2)}=\sqrt{\frac{(\delta+1)(\gamma+\delta)}{2\delta(\gamma+1)}};\ k_1^{(2)}=k_2^{(1)}=\sqrt{\frac{(\delta-1)(\gamma-\delta)}{2\delta(\gamma+1)}}\tag{31}$$

и из условий (28) и (29) остается одно условие

$$M\left(1+\frac{k_1^{2\,(1)}}{4}\right)+(M-2pa)\left(1+\frac{k_1^{2\,(2)}}{4}\right)=0.\tag{32}$$

(здесь, как и в дальнешем, подразумеваем $k_1^{2(1)} \equiv [k_1^{(1)}]^2, \cdots$).

Учитывая, что

$$k_1^{2\,(1)} + k_1^{2\,(2)} = 1, \tag{33}$$

из (32) следует

$$p = \frac{9M}{8a\left(1 + \frac{k_1^{2\,(2)}}{4}\right)}. \tag{34}$$

Так, как $0 < k_1^{2\,(2)} < k_1^{2\,(1)} < 1$, из (33) имеем $k_1^{2\,(2)} < \frac{1}{2}$, и, таким образом, из (34) получаем область изменения параметра p (считая $2a = 1$)

$$p \in \left(2M; \frac{9}{4}M\right). \tag{35}$$

После соответствующих вычислений, из (34), с учетом (31), получим равенство

$$\frac{\delta^2 + \gamma}{\delta(\gamma + 1)} = \frac{9(p - 2M)}{p}. \tag{36}$$

Введем обозначение

$$\alpha = \frac{9(p - 2M)}{p}, \quad (\alpha < 1), \tag{37}$$

из (36), относительно δ получим уравнение

$$\delta^2 - \alpha(\gamma + 1)\delta + \gamma = 0. \tag{38}$$

Потребуем, чтобы $\gamma > \frac{2}{\alpha} - 1$, тогда будем иметь $\frac{\alpha(\gamma+1)}{2} > 1$, и для однозначного определения δ (учитывая, что для функции $f(\delta) = \delta^2 - \alpha(\gamma+1)\delta + \gamma$ имеем $f(1) = (\gamma+1)(1-\alpha)$) необходимо, чтобы дискриминант уравнения (38) равнялся нулю, т. е. $D = \alpha^2(\gamma+1)^2 - 4\gamma = 0$, из которого, относительно γ получим уравнение

$$\gamma^2 + \frac{2\alpha^2 - 4}{\alpha^2}\gamma + 1 = 0. \tag{39}$$

Так, как для трехчлена $g(\gamma) = \gamma^2 + \frac{2\alpha^2 - 4}{\alpha^2}\gamma + 1$ имеем $g(0) = 1 > 0;\ g(1) = -4 \cdot \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2} < 0,$ дискриминант $D_1 = \frac{16(1 - \alpha^2)}{\alpha^4} > 0$, для γ_1, которая удовлетворяет условию $\gamma > 1$, получим формулу

$$\gamma = \frac{\left(\sqrt{1 - \alpha^2} + 1\right)^2}{\alpha^2}. \tag{40}$$

После нахождения γ, для определения δ из (38) имеем формулу

$$\delta = \frac{\alpha(\gamma + 1)}{2}. \tag{41}$$

На основании приведенных результатов заключаем:

При заданных внешних усилиях, для конкретного значения p из интервала (35) (и тем самым значения параметра K_0, так как при введенных обозначениях $K_0 = 16pD_0(1-\sigma)$), определяя α из (37), а параметры γ и δ из (40) и (41), уравнения искомого равнопрочного контура на основании (23) и (24) (с учетом формулы (30) и равенства $\Phi_2(\xi) = -\Phi_1(-\xi)$) даются формулами

$$\omega(\xi) = \frac{1}{2p}\left[A(\xi) + iA(-\xi)\right], \quad \xi \in [-1;1], \tag{42}$$

$$\omega(\xi) = \frac{1}{2p}\left[A(\xi) + M + i\left(A(-\xi) + M\right)\right], \quad \xi \in (-\infty; a_4] \cup [a_3; \infty), \tag{43}$$

где

$$A(\xi) = \frac{p(\gamma-\delta)(\delta+1)}{\sqrt{\delta}[2(\gamma+1)]^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt{(\xi+1)(\xi^2-\delta^2)(\xi-\gamma)}}{(\xi-\delta)^2}. \tag{44}$$

Так, как из (44) имеем

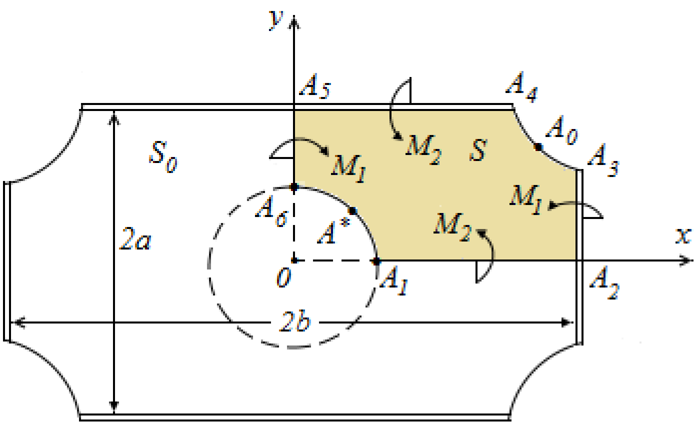
$$A(\infty) = \frac{p(\gamma-\delta)(\delta+1)}{\sqrt{\delta}[2(\gamma+1)]^{3/2}},$$

то для точки A_0 на основании (43) получаем

$$A_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{(\gamma-\delta)(\delta+1)}{\sqrt{\delta}[2(\gamma+1)]^{3/2}}\right](1+i),$$

а для серединной точки A^* дуги $\breve{A_6A_1}$ (см. фиг. 1) имеем:

$$A^* = \frac{(\gamma-\delta)(\delta+1)\sqrt{\gamma}}{2[2\delta(\gamma+1)]^{3/2}}(1+i).$$



Фиг. 1

REFERENCES

1. N.V. Banichuk, Optimization of forms of elastic bodies. (Russian), Nauka, Moscow, 1980.
2. G.P. Cherepanov, Inverse problems of the plane of elasticity. (Russian), J. Prikl. Mat. Mech. 38 (1974), №6, 963-979; J. Appl. Mat. Mech. 38 (1975), №6, 915-931.

3. R. Bantsuri, One mixed problem of the plane theory with a partially unknown boundary. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 140 (2006), 9-16.
4. R. Bantsuri, Solution of the mixed problem of plate bending for a multi-connected domain with partially unknown boundaries in the presence of cyclic symmary. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 145 (2007), 9-22.
5. N. Odishelidze and F. Criado-Aldenueva, Some exially symmetric problems of the theory of plane elasticity with partially unknown boundaries. Acta Mechan. 199 (2008), 227-240.
6. Sh.V. Mzhavanadze, Inverse problems of elasticity theory in the presence of cyclic symmetry (Russian), Soobsh. Akad. Nauk Gruzin. SSR, 113 (1984), №1, 53-56.
7. G. Kapanadze, The problem of plate bending for a finite doubly-connected domain with a partially unknown boundary(Russian), Prikl. Mech. 39 (2003), №5, 121-126.
8. G. Kapanadze, On one problem of the plane theory of elasticity with a partially unknown boundary. Proc. of A. Razmadze Math. Inst. 143 (2007), 61-71.
9. G.A. Kapanadze, On a problem of bending a plate for a doubly connected domain with partially unknown boundary (Russian), Prikl.Math. Mech. 71 (2007), №1, 33-42; Translation in Appl. Math. Mech. 71 (2007), №1, 30-39.
10. R. Bantsuri and G. Kapanadze, The problem of finding a full-strength contour inside the polygon. Proc. of A Razmadze Math. Inst. Vol 163 (2013), 1-7.
11. N.I. Muskhelishvili, Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, (Russian), Nauka, Moscow, 1966.
12. N.I. Muskhelishvili, Singular Integral Equations, (Russian), Nauka, Moscow, 1968.
13. S.G. Lekhnitskii, Some problems related to the theory of the bending of thin plates. (Russian), Prikl. Math. Mekh. 1938, 2, 2, 181-210.
14. M.M. Fridman, Some problems of the theory of the bending of thin isotropic plates, (Russian), Prikl. Math. Mekh. 1941, 5, 1, 93-102.
15. M. V. Keldish and L.I. Sedov, The effection solution of some boundary value problems for harmonic functions (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR XVI (1937), №1, 7-10.
16. A.P. Prudnikov, Iu. A. Brychkov and O.I. Marichev, Integral and series. Elementary functions (Russian), Nauka, Moscow, 1981.

